فشرده سازی زمان در شبکه های PERT با رویکرد الگوریتم ژنتیک

مجید اسماعیلیان مبارکه (دانشجوی دکتری مدیریت دانشگاه تهران)
majid-es@parsimail.com
امیر افسر (دانشجوی دکتری مدیریت دانشگاه علامه طباطبایی)
amirafsar78@yahoo.com

چکیده

در این مقاله یک مدل برنامه ریزی غیرخطی چند هدفه برای فشرده سازی زمان شبکه های PERT ارائه گردیده است که هدف اصلی آن عبارت است از حداقل سازی زمان بدبینانه فعالیتهای بحرانی در شبکه های PERT با صرف بودجه بیشتر در فعالیتهایی است که در مسیر بحرانی قرار دارند. در واقع، این مدل نشان دهنده نحوه تخصیص بودجه بین فعالیتهای مسیر بحرانی است که در نهایت نشان می دهد، کاهش زمان بدبینانه فعالیتهای بحرانی باعث کاهش زمان تکمیل پروژه و واریانس آن می گردد. با توجه به غیرخطی بودن مدل ارائه شده، از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل استفاده شده است. نتایج کاربرد مدل ریاضی ارائه شده نشان می دهد که این مدل، احتمال تکمیل پروژه تا تاریخ برنامه ریزی شده را افزایش می دهد.

کلمات کلیدی: مدیریت پروژه، فشرده سازی ، شبکه، PERT ، برنامه ریزی غیر خطی، الگوریتم ژنتیک

۱– مقدمه

فشرده سازی زمان پروژه در اصل با تکنیک CPM برای برنامه ریزی و کنترل پروژهای بزرگ توسعه یافته است. هدف از فشرده سازی زمان در شبکه های CPM این است که مشخص شود اگر لازم باشد با تخصیص بودجه اضافی زمان کل پروژه کاهش یابد، زمان کدام یک از فعالیتها را باید با استفاده از منابع اضافی فشرده کرد. فشرده سازی در شبکه های CPM به این منظور است که فعالیت و یا فعالیت هایی با کمترین میزان هزینه برای کاهش زمان پروژه انتخاب گردند.

این فرایند تا زمانی که پروژه به میزان کافی فشرده شده و یا اینکه هزینه فشرده سازی و کاهش زمان پروژه از مزایایی به دست آمده از آن پیشی گیرد، تکرار می شود. فشرده سازی پروژه در شبکه های PERT که در آنها از زمانهای تخمینی استفاده می گردد، مطرح نمی باشد. احتمالی بودن زمان تکمیل پروژه در یک تاریخ مشخص بیان کننده مساله و مشکل می باشد.

فشرده سازی شبکه های PERT توسط برخی از محققین مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته است. Johnson و Schou (۱۹۹۰) یک سری از قواعد و قوانین موثر برای یافتن فعالیتهایی که ابتدا باید فشرده سازی شوند را بیان می دارند. Samman (۱۹۹۱) سعی می کند که این مساله را توسط برخی از روشهای ابتکاری حل نماید. Keefer و Vardini (۱۹۹۳) سعی می نمایند که تخمین زمان پارامترهای فعالیتها در شبکه های PERT را بهبود و ارتقاء دهند و این بهبود دارای صحت و درستی بیشتری نسبت به قواعد و روشهای فعلی می باشد. هرچند تعدادی از محققین توزیع زمان در شبکه های PERT را مورد انتقاد قرار داده اند، ولی با این حال این روش به عنوان یک روش و ابزار موثر برای زمان بندی پروژهای احتمالی به کار گرفته می شود.

Cho و Yum (۱۹۹۷) یک روش جدید برای ارزیابی "معیار اهمیت عدم اطمینان" ارائه کرده اند. این موارد نشان دهنده برخی از تلاشهای محققان برای بیان تعدادی از مشکلات و مسائل توسعه یک روش منطقی برای فشرده سازی زمان در شبه های احتمالی می باشد. یکی از اهداف این مقاله توسعه یک روش برای فشرده سازی زمان بدبینانه در شبکه های PERT به وسیله صرف بودجه اضافی به منظور کاهش زمان و واریانس پروژه می باشد که این امر احتمال تکمیل پروژه در یک زمان مشخص را افزایش می دهد.

Azaron و همکاران (۲-۲۰۰۵) یک مدل چند هدفه برای مسایل تخصیص منابع در شبکه های PERT که توزیع زمان فعالیتهای آن نمایی یا ارلانگ می باشد، ارایه کرده اند. در این نوع شبکه های متوسط زمان هر فعالیت یک تابع غیر افزایشی و هزینـه هـای مسـتقیم هـر فعالیت یک تابع غیر کاهشی از میزان منابع تخصیص داده نشده به فعالیت می باشد. متغیر تصمیم این مدل، میزان منابع تخصیص یافته بـه هـر فعالیت بوده و ۴ تابع هدف آن عبارتند از: حداقل کردن کل هزینه های مستقیم پروژه، حداقل کردن متوسط زمان تکمیل پـروژه، حـداقل کـردن واریانس زمان تکمیل پروژه، و حداکثر کردن احتمال اینکه زمان تکمیل پروژه از یک آستانه مشخصی تجاوز نکند.

Azaron و همکاران (۳-۲۰۰۵) یک مدل چندهدفه برای مسایل تبادل هزینه در شبکه های PERT با تعمـیم توزیـع ارلانـگ بـه زمان فعالیتها و استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حل آن نموده اند. آنها این مساله را در یک مدل چهار هدفه فرموله کرده اند که هـدف هـای آن عبارتند از: حداقل نمودن هزینه های مستقیم پروژه، حداقل کردن متوسط زمان تکمیل پروژه، حداقل کردن واریانس تکیل پروژه و حداکثر کردن احتمال اینکه زمان تکمیل پروژه از یک آستانه مشخص تجاوز نکند. چون امکان حلتجمیعـی مـدل و رسـیدن بـه جـواب بهینـه وجـود نداشـت، محققین از الگوریتم ژنتیک برای حل این مدل چهار هدفه استفاده کرده اند.

مفهوم فشرده سازی زمان در شبکه های CPM در شبکه های PERT نیز کاربرد دارد . به منظور کاهش مدت زمان تکمیل پروژه در یک تاریخ مشخص باید بودجه اضافی صرف گردد، این امر در زمانبندی پروژه به منظور اجتناب از تاخیر لازم و ضروری است.

۲- ساخت مدل

بر اساس تکنیک PERT سنتی احتمال تکمیل پروژه تا زمان بر نامه ریزی شده(T_s) برابر با $\phi(Z)$ می باشد که:

$$Z = \frac{T_s - \mu_{TE}}{\sigma_{TE}}$$

و

$$\mu TE = \sum_{i=1}^{n} t_{ei} \qquad (۱)$$

$$\sigma TE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 t_{ei}} \qquad (۲)$$

$$t_{ei} = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6} \qquad (۳)$$

$$\sigma^2 t_{ei} = \frac{(bi - ai)^2}{36} \qquad (۴)$$

n کل تعداد فعالیتهایی است که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند. مقدار پولی که روی هر فعالیت واقع در مسیر بحرانی سرمایه گذاری می گردد ، منجر به کاهش زمان بد بینانه از b به $\hat{b}$ و زمان مورد انتظار پروژه از μ_{TE} به $\hat{\mu}_{TE}$ و انحراف استاندارد از σ_{TE} به $\hat{\sigma}_{TE}$ می گردد. فرض کنید که برای یک پروژه مشخص مسیر بحرانی شامل n فعالیت باشد و مقدار پولی که باید بر روی مسیر بحرانی

سرمایه گذاری شود برابر با M واحد پولی باشد. بعد از سرمایه گذاری مقدار پول اضافی ، زمان مورد انتظار و واریانس جدید هر فعالیت به صورا زیر است:

$$\hat{t}_{ei} = \frac{a_i + 4m_i + \hat{b}_i}{6} \qquad (۶)$$

$$\hat{\sigma}^2 t_{ei} = \frac{\left(\hat{b}_i - a_i\right)^2}{36} \qquad (۷)$$

و زمان مورد انتظار جدید برای تمامی فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{t}_{e_1} = \frac{a_1 + 4m_1 + \hat{b}_1}{6} \qquad (۸)$$

$$\hat{t}_{e2} = \frac{a_2 + 4m_2 + \hat{b}_2}{6}$$

$$\vdots$$

$$\hat{t}_{en} = \frac{a_n + 4m_n + \hat{b}_n}{6}$$

و واریانس جدید کلیه فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{\sigma}^2 t_{e1} = \frac{\left(\hat{b}_1 - a_1\right)^2}{36} \qquad (۹)$$

$$\hat{\sigma}^2 t_{e2} = \frac{\left(\hat{b}_2 - a_2\right)^2}{36}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\sigma}^2 t_{en} = \frac{\left(\hat{b}_n - a_n\right)^2}{36}$$

و مقدار پول صرف شده بر روی کلیه فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند به صورت زیر خواهد بود:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = M \qquad (۱۰)$$

بعد از صرف بودجه در فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند احتمال اتمام پروژه برابر با $\phi(Z)$ است که :

$$Z = \frac{T_s - \hat{\mu}_{TE}}{\hat{\sigma}_{TE}} \qquad (۱۱)$$

و

$$\hat{\mu}TE = \sum_{i=1}^{n} \hat{t}_{ei} \qquad (۱۲)$$

$$\hat{\sigma}TE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}^2 t_{ei}} \qquad (۱۳)$$

پس احتمال اتمام پروژه برابر است با :

$$Z=\frac{T_s-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_1+4m_1+\hat{b}_1}{6}+\frac{a_2+4m_2+\hat{b}_2}{6}+\ldots+\frac{a_n+4m_n+\hat{b}_n}{6}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\hat{b}_1-a_1\right)^2}{36}+\frac{\left(\hat{b}_2-a_2\right)^2}{36}+\ldots+\frac{\left(\hat{b}_n-a_n\right)^2}{36}\right)}} \qquad (۱۴)$$

زمانی که مقدار پول صرف شده بر روی هر فعالیت ، زمان مورد انتظار t_e را کاهش خواهد داد. این کاهش بستگی به میزان پول صرف شده بر روی هر فعالیت دارد به این مفهوم که کاهش در زمان مورد انتظار هر فعالیت از t_e به $\hat{t}_e$ تابع ϕ از میزان پول صرف شده است.پس زمان مورد انتظار جدید برای یک فعالیت مشخص به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{t}_{e_1}=t_{e_1}-\phi(r_i) \qquad (۱۵)$$

و معادله زمان مورد انتظار جدید به صورت زیر می باشد:

$$\hat{t}_e=t_e+q_ir_i \qquad -\frac{t_{ei}}{r_i}<qi<0 \qquad (۱۶)$$

در صورتی که $q_i<0$ برابر با کاهش نهایی در زمان فعالیت به ازاء هر واحد افزایش در بودجه صرف شده بر روی فعالیت است. به روش مشابه مقدار پول اضافی صرف شده (r_i) موجب کاهش واریانس شده و این کاهش در واریانس بستگی به مقدار پول صرف شده بر روی فعالیت دارد، به این مفهوم که این میزان کاهش تابع ψ از (r_i) می باشد و مقدار واریانس جدید برابر است با :

$$\hat{\sigma}^2{}_i=\sigma^2{}_i-\psi(r_i) \qquad (۱۷)$$

و واریانس جدید را به صورت زیر می توان نشان داد:

$$\hat{\sigma}^2{}_i=\sigma^2{}_i+s_ir_i \qquad -\frac{\sigma^2{}_i}{r_i}<s_i<0 \qquad (۱۸)$$

در صورتی که $s_i<0$ ، میزان کاهش نهایی در سطح واریانس فعالیت به ازاء هر واحد افزایش در بودجه صرف شده است. کاهش در واریانس با یک درصد مشخص برابر با کاهش در انحراف معیار با همان درصد مشخص است. برای نشان دادن این موضوع معادله (۱۸) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\hat{\sigma}_i=\sigma_i+s_ir_i \qquad -\frac{\sigma_i}{r_i}<s_i<0 \qquad (۱۹)$$

اما:

$$\sigma_i=\frac{(b-a)}{6} \quad \text{و} \quad \hat{\sigma}_i=\frac{\left(\hat{b}-a\right)}{6}$$

پس:

$$\frac{\left(\hat{b}-a\right)}{6}=\frac{(b-a)}{6}+s_ir_i \qquad (۲۰)$$

همچنین از معادله (۱۶) نتیجه می توان گرفت:

$$\hat{b} = b + 6q_i r_i \qquad (۲۱)$$

و با جایگذاری معادله (۲۰) و (۲۱) نتیجه زیر به دست می آید:

$$s_i = q_i \qquad (۲۲)$$

به این مفهوم که دو نسبت q_i و s_i باید یکسان و برابر باشند، زیرا میزان پول صرف شده بر روی یک فعالیت، زمان بد بینانه آن فعالیت را کاهش خواهد داد و این زمان بدبینانه به عنوان قسمتی از زمان فعالیت و واریانس آن می باشد در حالی که کاهش در زمان مورد انتظار هر فعالیت تابعی از r_i می باشد، زمان مورد انتظار فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند و فشرده شده اند به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \hat{t}_{e1} &= t_{e1} - \phi(r_1) \\ \hat{t}_{e2} &= t_{e2} - \phi(r_2) \\ &\vdots \\ \hat{t}_{en} &= t_{en} - \phi(r_n) \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

بعد از تخمین تابع ϕ معدله قبل را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \hat{t}_{e1} &= t_{e1} + q_1 r_1 && -\frac{t_{e1}}{r_1} < q_1 < 0 \\ \hat{t}_{e2} &= t_{e2} + q_2 r_2 && -\frac{t_{e2}}{r_2} < q_2 < 0 \\ &\vdots \\ \hat{t}_{en} &= t_{en} + q_n r_n && -\frac{t_{en}}{r_n} < q_n < 0 \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

در صورتی که کاهش در واریانس یک فعالیت تابعی از (r_i) می باشد، پس واریانس جدید فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند و زمان آنها فشرده شده است به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2{}_{te1} &= \sigma^2{}_{te1} - \psi_1(r_1) \\ \hat{\sigma}^2{}_{te2} &= \sigma^2{}_{te2} - \psi_2(r_2) \\ &\vdots \\ \hat{\sigma}^2{}_{ten} &= \sigma^2{}_{ten} - \psi_n(r_n) \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

با روش مشابه بعد از تخمین تابع ψ ، معادله های قبل به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2{}_{te1} &= \sigma^2{}_{te1} + s_1 r_1 && -\frac{\sigma^2{}_{te1}}{r_1} < s_1 < 0 \\ \hat{\sigma}^2{}_{te2} &= \sigma^2{}_{te2} + s_2 r_2 && -\frac{\sigma^2{}_{te2}}{r_2} < s_2 < 0 \\ &\vdots \\ \hat{\sigma}^2{}_{ten} &= \sigma^2{}_{ten} + s_n r_n && -\frac{\sigma^2{}_{ten}}{r_n} < s_n < 0 \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

بعد از سرمایه گذاری مقدار(r_i) واحد پولی در فعالیتهایی که بر روی مسیر بحرانی قرار دارند، زمان مورد انتظار جدید و واریانس جدید تابعی از (r_i) خواهند بود و احتمال اتمام پروژه برابر با $\phi(Z)$ می باشدکه :

$$Z = \frac{T_s - \hat{\mu}_{TE}}{\hat{\sigma}_{TE}} \tag{۲۷}$$

و

$$\hat{\mu}TE = \sum_{i=1}^{n} \hat{t}_{ei}$$

$$\hat{\sigma}TE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}^2 t_{ei}}$$

پس معادله Z را به صورت زیر می توان نوشت:

$$Z = \frac{T_s - \{\hat{t}_{e1} + \hat{t}_{e2} + \ldots + \hat{t}_{en}\}}{\sqrt{\{\sigma^2{}_{te1} + \sigma^2{}_{te2} + \ldots + \sigma^2{}_{ten}\}}} \tag{۲۸}$$

و

$$\hat{t}_{ei} = t_{ei} + q_i r_i$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{tei} = \sigma^2{}_{tei} + s_i r_i$$

پس

$$Z = \frac{T_s - \{t_{e1} - q_1 r_1 + t_{e2} - q_2 r_2 \ldots + t_{en} - q_n r_n\}}{\sqrt{\{\sigma^2{}_{te1} + s_1 r_1 + \sigma^2{}_{te2} + s_2 r_2 + \ldots + \sigma^2{}_{ten} + s_n r_n\}}} \tag{۲۹}$$

در صورتی که $\sum_{i=1}^{n} \sigma^2{}_{t_{ei}}$ و $\sum_{i=1}^{n} t_{ei}$ بعد و قبل از فشرده سازی پروژه یکسان هستند و داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ei} = t_{e1} + t_{e2} + \ldots + t_{en} = c_1 \tag{۳۰}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma^2{}_{t_{ei}} = \sigma^2{}_{t_{e1}} + \sigma^2{}_{t_{e2}} + \ldots + \sigma^2{}_{t_{en}} = c_2 \tag{۳۱}$$

پس می توان نوشت:

$$Z = \frac{T_s - \left\{c_1 + \sum_{i=1}^{n} q_i r_i\right\}}{\sqrt{c_2 + \sum_{i=1}^{n} s_i r_i}} \tag{۳۲}$$

که

$$-\frac{t_{ei}}{r_i} < q_i < 0$$

$$-\frac{\sigma^2{}_i}{r_i} < s_i < 0$$

$$0 < r_i < \overline{r}_i$$

و $\overline{r}_i$ برابر با حد بالای مقدار پول قابل سرمایه گذاری بر روی فعالیت (i) می باشد.معادله (۳۲) مدل ریاضی مورد نیاز است که نشان دهنده تابع هدف و محدودیتهای آن است. ارزش مقادیر q_i و s_i به وسیله افراد متخصص که دارای دانش و تخصص بالا در زمینه فعالیتهای پروژه هستند تعیین می گردد و متغیر مدل r_i می باشد، پس کل مدل را به صورت زیر می توان نشان داد:

$$MaxZ = \frac{T_s - c_1 - \sum_{i=1}^{n} q_i r_i}{\sqrt{c_2 + \sum_{i=1}^{n} s_i r_i}} \tag{۳۳}$$

$$0 < r_i < \overline{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \le M$$

اطلاعات زیر باید قبل از بکارگیری مدل معین گردد:

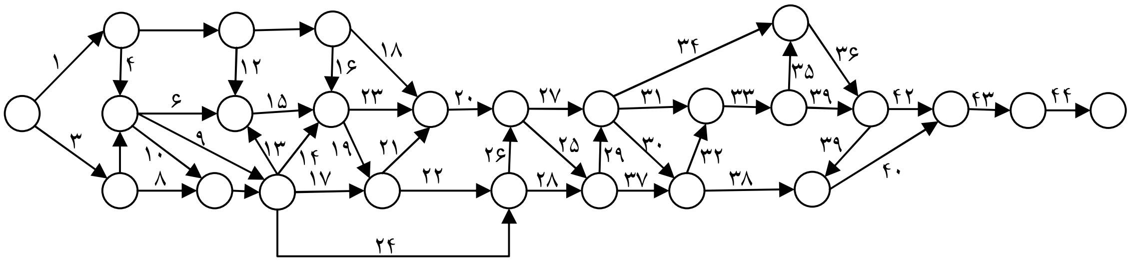
۱) مشخص کردن مسیر بحرانی
۲) معین کردن فعالیتهایی روی مسیر بحرانی که باید فشرده شوند. این کار توسط متخصصین صورت می گیرد.
۳) مشخص کردن مقدار q_i و s_i، این پارامترها توسط متخصصین و افرادی که تسلط کافی به طبیعت فعالیتها و فرایندهای کاری دارند معین می گردد.
۴) معین کردن مقدار T_s
۵) مشخص کردن حداکثر میزان پولی که می توان روی فعالیتهایی از مسیر بحرانی که قابل فشرده سازی هستند، صرف کرد. حداقل سطحی که فعالیتها می توانند فشرده شوند تعیین کننده حداکثر پول قابل صرف بر روی یک فعالیت است.
۶) معین کردن حداکثر پول قابل دسترس (M) برای کاهش زمان پروژه
۷) مشخص کردن مقدار c_1 و c_2، c_1 برابر است با مجموع زمان فعالیتهایی که روی مسیر بحرانی قرار دارند و c_2 برابر است با مجموع واریانس فعالیتهایی که روی مسیر بحرانی قرار دارند.

ممکن است در پروژه ای یک یا چند مسیر بحرانی وجود داشته باشد. در شبکه های PERT، مسیر بحرانی مسیری است که دارای کمترین احتمال تکمیل باشد. مدل ارایه شده در بخش (۲) تنها یک مسیر با طولانی ترین زمان تکمیل(مسیر بحرانی) را درنظر گرفته و با تخصیص بودجه به فعالیتها، زمان تکمیل آن را کاهش می دهد، درصورتی که ممکن است با کاهش مدت زمان مسیر بحرانی اولیه، مسیر دیگری در شبکه بحرانی گردد. برای نشان دادن این امر، مثال عددی زیر ارایه شده است.

۳- مثال عددی

در این بخش یک مثال شامل ۴۴ فعالیت آورده شده است تا اولاً شیوه عمل مدل در کاهش مدت زمان پروژه و نحوه ارتباط فعالیتها نشان داده شود و نقطه ضعف مدل تک هدفه ارایه شده در بخش ۲ نیز مشخص گردد. در جدول ۱، ۳ تخصیص زمانی برای فعالیتهای پروژه داده شده است. در شکل ۱، شبکه پروژه نشان داده شده است. در جدول ۲ مقادیر q_i و s_i و $\overline{r}_i$ برای فعالیتهای واقع بر روی مسیر بحرانی نشان داده شده است. این ضرایب توسط متخصصینی که تسلط کافی به فرایندها و ماهیت فعالیتهای پروژه دارند، قابل تخمین است. کل بودجه تخصیص یافته برای کاهش زمان پروژه نیز ۳۰،۰۰۰ واحد پولی درنظر گرفته شده است.

شکل۱. شبکه پروژه



جدول ۱: اطلاعات مربوط به کل فعالیتهای شبکه

شماره فعالیت	a	m	b	شماره فعالیت	a	m	b	شماره فعالیت	a	m	b
۱	۵	۱۲	۳۵	۱۶	۵	۹	۱۶	۳۱	۱۵	۱۹	۲۱
۲	۵	۸	۹	۱۷	۱۲	۱۴	۱۵	۳۲	۲۳	۲۹	۳۹
۳	۵	۸	۲۵	۱۸	۱۲	۱۳	۱۵	۳۳	۲۵	۲۹	۳۸
۴	۱۰	۱۲	۱۵	۱۹	۱۲	۱۵	۱۹	۳۴	۱۱	۱۶	۱۸
۵	۲	۵	۸	۲۰	۱۵	۱۶	۱۹	۳۵	۲۲	۲۸	۳۵
۶	۵	۸	۹	۲۱	۱۵	۱۸	۱۹	۳۶	۲۳	۲۴	۳۰
۷	۸	۱۱	۱۵	۲۲	۹	۱۰	۱۲	۳۷	۱۲	۱۴	۱۹
۸	۹	۷	۲۵	۲۳	۱۲	۱۵	۱۸	۳۸	۱۲	۱۴	۱۵
۹	۸	۹	۱۶	۲۴	۱۲	۱۴	۱۸	۳۹	۳۰	۳۲	۳۶
۱۰	۷	۸	۱۲	۲۵	۲۱	۲۲	۲۹	۴۰	۳۰	۳۵	۳۶
۱۱	۲	۴	۵	۲۶	۱۲	۱۳	۱۹	۴۱	۱۰	۱۱	۱۵
۱۲	۵	۹	۱۴	۲۷	۱۲	۱۵	۱۷	۴۲	۲۳	۲۳	۲۴
۱۳	۲	۳	۵	۲۸	۱۵	۱۷	۱۹	۴۳	۳۰	۳۰	۳۲
۱۴	۱۳	۱۵	۱۸	۲۹	۲۶	۲۹	۳۱	۴۴	۲۵	۲۶	۲۹
۱۵	۵	۸	۱۱	۳۰	۳۰	۳۲	۳۵				

جدول ۲: مقادیر q_i و s_i و $\bar{r}_i$ برای فعالیتهای واقع بر روی مسیر بحرانی که باید فشرده شوند.

شماره فعالیت	q_i	s_i	$\bar{r}_i$	شماره فعالیت	q_i	s_i	$\bar{r}_i$
۱	−۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	۵،۰۰۰	۳۰	−۰/۰۰۰۴۵	−۰/۰۰۰۴۵	۷۵۰
۴	−۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۰۳	۱،۰۰۰	۳۲	−۰/۰۰۰۳۶	−۰/۰۰۰۳۶	۳،۲۰۰

۹	-۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۱۱	۳،۰۰۰	۳۳	-۰/۰۰۰۵۵	-۰/۰۰۰۵۵	۳،۳۰۰
۱۴	-۰/۰۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۲۳	۲،۰۰۰	۳۵	-۰/۰۰۰۶۶	-۰/۰۰۰۶۶	۱،۵۰۰
۱۹	-۰/۰۰۰۴۱	-۰/۰۰۰۴۱	۱،۰۰۰	۳۶	-۰/۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۷	۱،۱۰۰
۲۰	-۰/۰۰۰۳۳	-۰/۰۰۰۳۳	۱،۲۰۰	۳۹	-/۰۰۰۲	-/۰۰۰۲	۲،۲۰۰
۲۱	-۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۵	۲،۰۰۰	۴۰	-۰/۰۰۰۲۵	-۰/۰۰۰۲۵	۵۰۰
۲۵	-۰/۰۰۰۳۶	-۰/۰۰۰۳۶	۱،۸۰۰	۴۳	-۰/۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۳	۸۵۰
۲۹	-۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۱۸	۸۰۰	۴۴	-۰/۰۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۰۴	۶،۰۰۰

۴- حل مدل با رویکرد الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک یک تکنیک جستجو وبهینه سازی قوی، با کاربرد وسیع است که بر اساس اصولی از تئوری تکامل بنا نهاده شده است. این تکنیک با توجه به سرعت زیاد و همچنین قابلیت یافتن نقطه بهینه مطلق برای طیف وسیعی ازتوابع، کاربرد زیادی در مدیریت و مباحث بهینه سازی دارد.

اصول اساسی این روش برای اولین بار توسط Holland و همکارانش در دانشگاه میشیگان در سال ۱۹۶۲ مطرح شد و در سالهای بعد توسط پروفسور Goldberg در دانشگاه Illinois گسترش یافت. اهداف اولیه تحقیقاتی گروه Holland شامل دو مرحله بود:

۱) تشخیص، تفکیک وتوضیح مراحل قابل تطبیق سیستمهای طبیعی برای سیستمهای جستجوگر

۲) بهره گیری از این اطلاعات درطراحی نرم افزارهای سیستمهای مصنوعی که در بر گیرنده عملکرد سیستمهای طبیعی باشند.

این الگوریتم مزایای زیادی دارد، چنانکه محدودیتی نظیر مشتق پذیری یا پیوستگی بر روی تابع بهینه شونده اعمال نمی‌کند و در آن تنها شرط لازم برای تابع مورد بررسی، آن است که مقدار تابع در نقاط مختلف مشخص باشد. از این رو می‌توان از این الگوریتم در مسائل مختلف اعم از خطی و غیر خطی، پیوسته یا گسسته و مقید یا بدون قید بهره گرفت. قابلیتهای منحصر به فرد این الگوریتم بکارگیری آن را در یافتن نقاط بهینه توابع، تعلیم شبکه های عصبی، طراحی کنترل کننده های فازی، تقسیم بندی سیستم ها، مسائل NP و ساختمان داده ها و ... تضمین می‌کند.

برای حل مدل نهایی ارایه شده در این مقاله، عملگرهای مختلفی توسعه داده شده اند و برای بررسی کارایی عملگرها نیز آزمایش های متعددی بر روی مسایل با اندازه های مختلف انجام گرفته است. ساختار الگوریتم ژنتیک ارایه شده به شرح زیر می‌باشد.

الف) کروموزوم: رشته یا دنباله‌ای از بیت‌ها که به عنوان شکل کد شده یک جواب ممکن (مناسب یا نامناسب) از مساله مورد نظر می‌باشد چنانچه از کد گذاری دودویی استفاده شود، هر بیت، یکی از مقادیر صفر و یک را می‌پذیرد. هرکدام از بیتهای کروموزوم مسئله اخیر، یک جواب بالقوه برای متغیرهای مسئله می باشد.

ب) تابع هدف و برازندگی: تابع هدف جهت تعیین اینکه افراد چگونه در محدوده مساله ایفای نقش می‌نمایند، مورد استفاده قرار می‌گیرد و تابع برازندگی معمولا برای تبدیل مقدار تابع هدف به یک مقدار برازندگی وابسته به آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر داریم:

$F(n)=g(f(x))$

بطوریکه f تابع هدف بوده و تابع g مقدار تابع هدف را به یک عدد غیر منفی تبدیل می‌نماید وF مقدار برازندگی مربوطه می‌باشد. مناسب بودن یا نبودن جواب با مقداری که از تابع برازندگی بدست می‌آید، سنجیده می‌شود. چون مسئله از نوع بهینه سازی می باشد، تابع برازش با تابع هدف مسئله یکسان می باشد.

ج) اندازه جمعیت و تعداد تولید: تعداد کروموزومها را اندازه جمعیت می‌گویند. در این تحقیق، اندازه جمعیت در آزمایشهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته و جمعیت از یک نسل به نسل دیگر به منظور یافتن جواب بهتر با استفاده از روشهای تولید مثل بهبود یافته است. اندازه جمعیت این تحقیق، ۵۰۰۰ کروموزوم می باشد.

د) عملگرهای ژنتیک: برای پیدا کردن یک نقطه در فضای جستجو باید از عملگرهای ژنتیک استفاده نمود. دو مورد از این عملگرها عبارتند از:

۱- عملگر تقاطعی: عملگر اصلی جهت تولید کروموزوم‌های جدید در الگوریتم ژنتیک، عملگر تقاطع می‌باشد. این عملگر مشابه همتای خودش در طبیعت، افراد جدیدی تولید می‌نماید که اجزای (ژنهای) آن از والدینش تشکیل می‌گردد. در این تحقیق با توجه به اینکه عملگر تقاطع دو نقطه ای (Two Point) پاسخ مناسب تری را ارائه نموده است، از آن استفاده شده است.

۲- عملگر جهش: جهش یک فرآیند تصادفی است که در آن محتوای یک ژن با ژن دیگر جهت تولید یک ساختار ژنتیک جدید جایگزین می‌گردد.

عملگر جهش استفاده شده در این تحقیق، عملگر Gaussian است که با تغییر نسبت های مختلف آن، نسبت ۱ انتخاب شده است. عملگر جهش Gaussian یک عدد تصادفی از تابع توزیع Gaussian با میانگین صفر به هر ورودی بردار والد اضافه می کند. واریانس این توزیع، بوسیله پارامترهای مقیاس و جمع شوندگی (shrink) تنظیم می شود که دراین تحقیق با تغییرات متوالی این متغیرها، مقیاس ۲ و جمع شوندگی یک انتخاب شده است.

نتایج بدست آمده از حل مدل با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای تمامی متغیرها با اندازه جامعه ۵۰۰۰، تعداد تکرار ۴۰۰، عملگر جهش Gaussian، عملگر تقاطع ابتکاری در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۳: نتایج حل مدل تک هدفه

شماره فعالیت	t_e	σ^2	r_i	$\hat{t}_e$	$\hat{\sigma}^2$
۱	۱۴٫۶۷	۲۵٫۰۰	۵۰۰۰	۱۲٫۱۷	۲۲٫۵۰
۴	۱۲٫۱۷	۰٫۶۹	۱۰۰۰	۱۱٫۸۷	۰٫۳۹
۹	۱۰٫۰۰	۱٫۷۸	۲۴۱۱	۸٫۵۵	۰٫۳۳
۱۴	۱۵٫۱۷	۰٫۶۹	۲۰۰۰	۱۴٫۷۱	۰٫۲۳
۱۹	۱۵٫۱۷	۱٫۳۶	۱۰۰۰	۱۴٫۵۷	۰٫۷۶
۲۰	۱۶٫۳۳	۰٫۴۴	۱۲۰۰	۱۵٫۹۴	۰٫۰۵
۲۱	۱۷٫۶۷	۰٫۴۴	۱۶۴	۱۷٫۶۶	۰٫۴۴
۲۵	۲۳٫۰۰	۱٫۷۸	۱۸۰۰	۲۲٫۳۵	۱٫۱۳
۲۹	۲۸٫۸۳	۰٫۶۹	۸۰۰	۲۸٫۶۹	۰٫۵۵
۳۰	۳۲٫۱۷	۰٫۶۹	۷۵۰	۳۱٫۷۹	۰٫۳۲
۳۲	۲۹٫۶۷	۷٫۱۱	۳۲۰۰	۲۸٫۵۱	۵٫۹۶
۳۳	۲۹٫۸۳	۴٫۶۹	۲۰۰۰	۲۸٫۷۳	۳٫۵۹
۳۵	۲۸٫۱۷	۴٫۶۹	۱۵۰۰	۲۷٫۱۸	۳٫۷۰
۳۶	۲۴٫۸۳	۱٫۳۶	۱۱۰۰	۲۴٫۰۶	۰٫۵۹
۳۹	۳۲٫۳۳	۱٫۰۰	۲۱۰۰	۳۱٫۹۱	۰٫۵۸
۴۰	۳۴٫۳۳	۱٫۰۰	۵۰۰	۳۴٫۲۱	۰٫۸۸
۴۳	۳۰٫۳۳	۰٫۱۱	۸۱۳	۳۰٫۲۵	۰٫۰۳
۴۴	۲۶٫۳۳	۰٫۴۴	۲۶۶۲	۲۶٫۲۳	۰٫۳۴
جمع کل	۴۲۱	۵۴	۳۰۰۰۰	۴۰۹٫۴	۴۲٫۴

بعد از حل مدل تک هدفه، متوسط طول زمان مسیر بحرانی از ۴۲۱ واحد زمانی به ۴۰۹،۴ واحد زمانی و واریانس آن از ۵۴ به ۴۲،۴ رسیده است بنابراین احتمال تکمیل پروژه از۶،۶۸٪ به ۵۳،۵۹٪ افزایش یافته است. اما پس از حل مدل تک هدفه و تخصیص بودجه به فعالیتهای مسیر بحرانی، مسیر دیگری غیر از مسیر اول دارای حداکثر زمان می باشد و بحرانی می گردد. اطلاعات مربوط به این مسیر در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴: اطلاعات مربوط به مسیر بحرانی جدید

شماره فعالیت	t_e	σ^2	شماره فعالیت	t_e	$\hat{\sigma}^2$
۳	۱۰،۳۳	۱۱،۱۱	۳۰	۳۲،۱۷	۰،۶۹
۷	۱۱،۱۷	۱،۳۶	۳۲	۲۹،۶۷	۷،۱۱
۱۰	۸،۵	۰،۶۹	۳۳	۲۹،۸۳	۴،۶۹
۱۱	۳،۸۳	۰،۲۵	۳۵	۲۸،۱۷	۴،۶۹
۱۴	۱۵،۱۷	۰،۶۹	۳۶	۲۴،۸۳	۱،۳۶
۱۹	۱۵،۱۷	۱،۳۶	۳۹	۳۲،۳۳	۱،۰۰
۲۰	۱۶،۳۳	۰،۴۴	۴۰	۳۴،۳۳	۱،۰۰
۲۱	۱۷،۶۷	۰،۴۴	۴۳	۳۰،۳۳	۰،۱۱
۲۵	۲۳،۰۰	۱،۷۸	۴۴	۲۶،۳۳	۰،۴۴
۲۹	۲۸،۸۳	۰،۶۹	**جمع کل**	**۴۱۰،۶۱**	**۳۲،۵۷**

برای رفع این مشکل، از یک مدل چندهدفه استفاده می گردد. برای این کار دو یا چند مسیر در شبکه PERT که دارای متوسط طول زمانی نزدیک به هم هستند را در نظر گرفته و مدل برنامه ریزی ریاضی آن را بصورت زیر می سازیم:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = \min(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n) \\ &\text{S.T} \\ &\qquad Z_1 = \frac{T_s - c_{11} - \sum q_{i1} r_{i1}}{\sqrt{c_{21} + \sum s_{i1} r_{i1}}} \\ &\qquad Z_2 = \frac{T_s - c_{12} - \sum q_{i2} r_{i2}}{\sqrt{c_{22} + \sum s_{i2} r_{i2}}} \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad Z_n = \frac{T_s - c_{1n} - \sum q_{in} r_{in}}{\sqrt{c_{2n} + \sum s_{in} r_{in}}} \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} r_{ij} \le M \\ &\qquad 0 \le r_i \le \bar{r}_i \quad i = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{۳۴}$$

درصورتی که:

$c_{11} = \sum_i te_i$ به ازای فعالیتهایی که روی مسیر اول قرار دارند.

$c_{12} = \sum_i te_i$ به ازای فعالیتهایی که روی مسیر دوم قرار دارند.

$\vdots$

$c_{1n} = \sum_i te_i$ به ازای فعالیتهایی که روی مسیر n ام قرار دارند.

$c_{21} = \sum_i \sigma_{t_{ei}}{}^2$ به ازای فعالیتهایی که روی مسیر اول قرار دارند.

$c_{22} = \sum_i \sigma_{t_{ei}}{}^2$ به ازای فعالیتهایی که روی مسیر دوم قرار دارند.

$\vdots$

$c_{2n} = \sum_i \sigma_{t_{ei}}{}^2$ به ازای فعالیتهایی که روی مسیر n ام قرار دارند.

اطلاعات مربوط به مقادیر q_i و s_i و $\overline{r}_i$ برای فعالیتهای واقع بر مسیر بحرانی جدید که باید فشرده شوند در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵: مقادیر q_i و s_i و $\overline{r}_i$ برای فعالیتهای واقع بر مسیر بحرانی جدید که باید فشرده شود.

شماره فعالیت	q_i	s_i	$\overline{r}_i$	شماره فعالیت	q_i	s_i	$\overline{r}_i$
۳	−۰/۰۰۲۸	−۰/۰۰۲۸	۳،۰۰۰	۱۰	−۰/۰۰۴	−۰/۰۰۴	۵،۰۰۰
۷	−۰/۰۰۴	−۰/۰۰۴	۲،۵۰۰	۱۱	−۰/۰۰۰۶	−۰/۰۰۰۶	۳،۰۰۰

نتایج بدست آمده از حل مدل دو هدفه با استفاده از الگوریتم ژنتیک درجدول ۶ آورده شده است.

جدول ۶. نتایج حل مدل دو هدفه

شماره فعالیت	t_e	σ^2	r_i	$\hat{t}_e$	$\hat{\sigma}^2$
۱	۱۴،۶۷	۲۵،۰۰	۲۴۰۰	۱۳،۴۷	۲۳،۸
۳	۱۰،۳۳	۱۱،۱۱	۱۲۵	۱۰،۳	۱۱،۰۸
۴	۱۲،۱۷	۰،۶۹	۹۵۰	۱۱،۸۸	۰،۴۱
۷	۱۱،۱۷	۱،۳۶	۹۵	۱۱،۱۳	۱،۳۲
۹	۱۰،۰۰	۱،۷۸	۲۸۰۰	۸،۳۲	۰،۱
۱۰	۸،۵	۰،۶۹	۵۵۰	۸،۲۸	۰،۴۷
۱۱	۳،۸۳۳	۰،۲۵	۴۰	۳،۸۳۱	۰،۲۴۱
۱۴	۱۵،۱۷	۰،۶۹	۱۸۰۰،۰۰	۱۴،۷۵	۰،۲۸
۱۹	۱۵،۱۷	۱،۳۶	۹۳۰،۰۰	۱۴،۶۱	۰،۸۰
۲۰	۱۶،۳۳	۰،۴۴	۳۲۰،۰۰	۱۷،۶۵	۰،۴۳
۲۱	۱۷،۶۷	۰،۴۴	۱۱۵۰،۰۰	۱۵،۹۵	۰،۰۶
۲۵	۲۳،۰۰	۱،۷۸	۱۸۰۰،۰۰	۲۲،۳۵	۱،۱۳

۲۹	۲۸،۸۳	۰،۶۹	۶۴۰،۰۰	۲۸،۷۲	۰،۵۸
۳۰	۳۲،۱۷	۰،۶۹	۷۳۰،۰۰	۳۱،۸۰	۰،۳۳
۳۲	۲۹،۶۷	۷،۱۱	۳۱۰۰،۰۰	۲۸،۵۵	۶،۰۰
۳۳	۲۹،۸۳	۴،۶۹	۲۰۰۰،۰۰	۲۸،۷۳	۳،۵۹
۳۵	۲۸،۱۷	۴،۶۹	۱۴۵۰،۰۰	۲۷،۲۱	۳،۷۴
۳۶	۲۴،۸۳	۱،۳۶	۱۱۰۰،۰۰	۲۴،۰۶	۰،۵۹
۳۹	۳۲،۳۳	۱،۰۰	۱۶۰۰،۰۰	۳۲،۰۱	۰،۶۸
۴۰	۳۴،۳۳	۱،۰۰	۴۹۰،۰۰	۳۴،۲۱	۰،۸۸
۴۳	۳۰،۳۳	۰،۱۱	۳۰،۰۰	۳۰،۳۳	۰،۱۱
۴۴	۲۶،۳۳	۰،۴۴	۵۹۰۰،۰۰	۲۶،۱۰	۰،۲۱

بعد از حل مدل دو هدفه، متوسط زمان تکمیل و واریانس مسیر بحرانی اول به ترتیب ۴۱۰/۷۱ و ۴۳/۷۱ و متوسط زمان تکمیل و واریانس مسیر بحرانی دوم به ترتیب ۴۱۰/۵۵ و ۳۲/۵۳ می باشد. بنابراین احتمال زمان تکمیل پروژه در ۴۱۰ واحد زمانی از ۶/۶۸٪ به۴۶ ٪ افزایش می یابد

۵- نتیجه گیری

در این مقاله مفهوم فشرده سازی فعالیت ها، در شبکه های CPM در شبکه های PERT بکار گرفته شده و یک مدل برنامه ریزی غیر خطی چند هدفه برای دستیابی به این هدف ارایه گردیده است. هدف از ایجاد این مدل، افزایش احتمال دستیابی به آخرین گره بوسیله حداقل کردن زمان بدبینانه فعالیتهای مسیر بحرانی است که منجر به کاهش در زمان و واریانس تکمیل پروژه می گردد. برای استفاده از مدل ارائه شده لازم است مقادیر q_i و s_i و $\overline{r_i}$ برای فعالیتهای بحرانی معین گردد، این ضرایب توسط متخصصینی که تسلط کافی به فرایندها و ماهیت فعالیتهای پروژه دارند، قابل تخمین است. با توجه به اینکه در یک پروژه ممکن است دو یا چند مسیر دارای طول زمانی نزدیک به هم باشند استفاده از یک مدل تک هدفه برای کاهش زمان بدبینانه فعالیتهای بحرانی ممکن است منجر به بحرانی شدن سایر مسیر ها گردد برای رفع این مشکل لازم است که از یک مدل چند هدفه استفاده شود.

در مثال ارایه شده، با صرف هزینه اضافی روی فعالیت های بحرانی و کاهش زمان بدبینانه، احتمال تکمیل پروژه از ۶،۶۸ درصد به ۴۶ درصد افزایش یافته است.احتمال تکمیل پروژه همزمان با افزایش میزان سرمایه گذاری افزایش می یابد. زیرا زمان کل پروژه و واریانس زمان تکمیل پروژه کاهش می یابد. روش ارایه شده در این مقاله می تواند به برنامه ریزان پروژه در درک تبادل زمان- هزینه در شبکه های PERT کمک نماید.

۶- منابع

[1] Abbasi, Ghaleb Y., Mukattash, Adnan M., Crashing PERT networks using mathematical programming, International Journal of Project Management 19, 2001 181-188.

[2] Azaron, Amir, Katagiri, Hideki, Sakawa, Masatoshi, Kato, Kosuke, and Memariani, Azizollah, A multi-objective resource allocation problem in PERT networks, European Journal of Operational Research, 2005.

[3] Azaron, Amir, Perkgoz, Cahit, and Sakawa, Masatoshi, A genetic algorithm approach for the time-cost trade-off in PERT networks, Applied Mathematics and Computation 168, 2005, 1317–1339.
[4] Bazaraa MS, Shetty CM. Nonlinear programming theory and algorithms. New York: Wiley, 1979.
[5] Cho JG, Yum BJ. An uncertainty importance measure of activities in PERT networks. Int J Prod Res 1997;35(10):2737-2757.
[6] Feng, C.W., Liu, L., Burns, S.A., Using genetic algorithms to solve construction time-cost trade-off problems, Journal of Construction Engineering and Management, ASCE 11 (1997) 184–189.
[7] Golenkoginzburg D, Gonik A. A heuristic for network project scheduling with random activity duration's depending on the resource allocation. International Journal of Production Eco- nomics 1998;55(22):149-162.
[8] Johnson GA, Schou CD. Expediting projects in PERT with stochastic time estimates. Project Management Journal 1990;21(2):29-33.
[9] Keefer DL, Verdini WA. Better estimation of PERT activity time parameters. Management Science 1993;39(9).
[10] Lau Ahl, Lau HS, Zhang Y. A simple and logic alternative for making PERT time estimates. IIE Transaction 1996;28(3):183-192.
[11] Pongcharoen, P., Hicks, C., Braiden, P.M., Stewardson, D.J., Determining optimum genetic algorithm parameters for scheduling the manufacturing and assembly of complex products, International Journal of Production Economics 78 (2002) 311–322.
[12] Saman M. Crashing in PERT Networks. M.Sc. thesis submitted at the Faculty of Graduate Studies, University of Jordan, Amman-Jordan, August 1991.